



В. И. АРНОЛЬД

ЛЕКЦИИ
ПО КЛАССИЧЕСКОЙ
МЕХАНИКЕ

Часть II-я (5-12)

Эти лекции читались на 2-м курсе механико-математического факультета МГУ весной 1966 г. Настоящий выпуск, как и предыдущий, подготовлен к печати Н. Н. Колесниковым, а также В. Л. Нрвиковым и Л. Д. Вайнгортиным, которым я выражаю свою благодарность.

В. Арнольд. 16.10. 1966.

ЛЕКЦИЯ 5. ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПОЛЕ.

В прошлой лекции плоское движение в центральном поле

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}, \quad U = U(|\vec{r}|)$$

сведено к одномерному движению

$$\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad z = |\vec{r}|$$

в поле с потенциальной энергией $V(z)$. Здесь эффективная потенциальная энергия задается формулой $V(z) = U(z) + \frac{M^2}{2z^2}$, где $M = z^2 \dot{\varphi}$ — момент количества движения.

Полная энергия этого одномерного движения

$$E = \frac{1}{2} \dot{z}^2 + V(z)$$

сохраняется. Следовательно:

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{2(E - V(z))} \quad \text{или} \quad dt = \frac{dz}{\sqrt{2(E - V(z))}}$$

Так как $M = z^2 \dot{\varphi}$, имеем $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{z^2}$, откуда

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M/z^2}{\sqrt{2(E - V(z))}}$$

Чтобы найти форму траектории $\varphi = \varphi(z)$ остается одна

квадратура $\varphi = \int \frac{M/z^2 dz}{\sqrt{2(E - V(z))}}$ Пусть полная энер-

гия движения E . Тогда вся траектория лежит в области $V(z) \leq E$,

на границе этой области $V = E$, $T = 0$,

т.е. $\dot{z} = 0$. При этом скорость движения точки, вообще говоря, не равна нулю, т.е. $\dot{\varphi} \neq 0$ при $M \neq 0$.

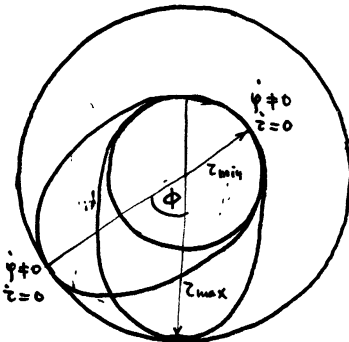
Неравенство $V(z) \leq E$ определяет область вида

$$0 \leq z_{\min} \leq z \leq z_{\max} \leq \infty$$

Если $0 < z_{\min} < z < z_{\max} < \infty$, то движение ограничено,

и происходит внутри кольца $z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$, между окружностями радиуса $z_{\min}$ и $z_{\max}$. Вид тра-

ектории показан на рисунке, φ меняется монотонно, а z колеблется между $z_{\min}$ и $z_{\max}$.



Точки $z = z_{\min}$ называются перицентрами, $z = z_{\max}$ — апоцентрами (если центр Земля — перигей и апогей, если Солнце — перигелий и афелий).

Каждый из лучей, ведущих из центра в апоцентр или

в перицентр является осью симметрии орбиты. В общем случае орбита не замкнута: угол между последовательными перицентром и апоцентром дается формулой

$$\Phi = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{\frac{M}{z^2} dz}{\sqrt{2(E - V(z))}}$$

Угол между двумя последовательными перицентрами вдвое больше. Траектория будет замкнутой, если Φ кратно π , т.е., если $\Phi = \pi \frac{m}{n}$, где m и n целые числа. Если $\Phi \neq \pi \frac{m}{n}$, то кривая не замкнута.

Задача. Доказать, что в этом случае траектория заполняет кольцо всюду плотно.

Если $z_{\min} = z_{\max}$, т.е. E — минимальное значение $V(z)$, то орбита будет окружностью с $z = z_{\min} = z_{\max}$.

При несколько больших значениях E кольцо $z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$

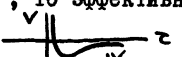
будет очень узким, а орбита близка к окружности. В соответствующей одномерной задаче z будет совершать ма-

ные колебания.

Задача. найти угол Φ для орбиты, близкой к круговой.

(Ответ: $\Phi = \pi \frac{M}{\sqrt{u(z)} z^2}$)

Рассмотрим теперь случай $z_{\max} = \infty$. Если $\lim_{z \rightarrow \infty} U(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} V(z) = V_{\infty} < \infty$, то возможен уход в бесконечность: если начальная энергия $E > V_{\infty}$, точка уходит на бесконечность с конечной скоростью $z_{\infty} = \sqrt{2(E - U_{\infty})}$.

При этом, если $U(z)$ стремится к своему пределу медленнее, чем $1/z^2$, то эффективный потенциал на бесконечности притягивающий  z , а если быстрее чем $1/z^2$, то отталкивающий:  z .

Если $|U(z)|$ при $z \rightarrow 0$ растет не быстрее $\frac{M^2}{2z^2}$, то $z_{\min} > 0$, и траектория не подходит к центру. Если же $U(z) + \frac{M^2}{2z^2} \rightarrow -\infty$ при $z \rightarrow 0$, то возможно "падение в центр поля". Попасть в центр поля возможно даже за конечное время (например, в поле $U(z) = -\frac{1}{z^3}$).

Задача. Противоречит ли это теореме единственности?

Кеплерова задача

Рассматривается движение в центральном поле с потенциалом $U = -\frac{k}{z}$, и, следовательно, $V(z) = -\frac{k}{z} + \frac{M^2}{2z^2}$.

По общей формуле

$$\varphi = \int \frac{M/z^2 dz}{\sqrt{2(E - V(z))}}$$

Интегрируя, получаем

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{M}{z} - \frac{k}{M}}{\sqrt{2E + \frac{k^2}{M^2}}}$$

К этому выражению следовало бы прибавить произвольную константу. Мы считаем ее равной нулю, что эквивалентно выбору начала отсчета угла φ от перицентра. Введем обозначения: $\frac{M^2}{k} = p$, $\sqrt{1 + \frac{2EM^2}{k^2}} = e$

Теперь получаем $\varphi = \arccos \frac{\frac{p}{z} - 1}{e}$, т.е.

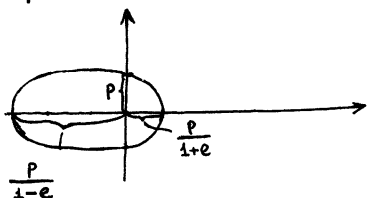
$$z = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

Это так называемое фокальное уравнение конического сечения.

Движение ограничено (рис.) при $E < 0$. Тогда

$e < 1$, т.е. коническое сечение - эллипс. Величина

p называется параметром эллипса, а e - эксцентриситетом.



Это - первый закон Кеплера, открытый им экспериментально, из наблюдений за движением планет: планеты описывают эллипсы, в фокусах

которых - Солнце.

Параметр и эксцентриситет связаны с полуосями соотношениями:

$$2a = \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} = \frac{2p}{1-e^2}$$

$$\text{, т.е. } a = \frac{p}{1-e^2}$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

, где $c = ae$ - расстояние

от центра до фокуса.

Замечание. Эллипс с малым эксцентриситетом очень похож на окружность. Если расстояние фокуса от центра первого порядка малости, то различие полуосей - второго: $b = a\sqrt{1-e^2} \approx a(1 - \frac{e^2}{2})$. Например, в эллипсе с большой полуосью 10 см и эксцентриситетом 0,1 **разность** полуосей составляет 0,5 мм, а расстояние между фокусом и центром - 1 см.

Эксцентриситеты орбит планет очень малы. Поэтому Кеплер, сначала сформулировал свой I закон так: планеты движутся во круг Солнца по окружностям, но Солнце находится не в центре.

II закон Кеплера: секториальная скорость постоянна - справедлив в любом центральном поле.

III закон: время обращения по эллиптической орбите зависит только от величины большой оси.

Квадраты периодов обращения 2-х планет по разным эллиптическим орбитам относятся как кубы их больших полуосей.

Доказательство. Обозначим через T период обращения, через S - площадь, заметенную радиусом-вектором за время T
 $2S = MT$, т.к. $M/2$ - секториальная скорость. Но площадь эллипса $S = \pi ab$, откуда $T = \frac{2\pi ab}{M}$. И так как
 $a = \frac{m^2/k}{2|E| \frac{M^2}{k^2}} = \frac{k}{2|E|}$ (из $a = \frac{p}{1-e^2}$), $b =$
 $= \frac{M^2}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2|E|} \cdot \frac{M}{k}} = \frac{M}{\sqrt{2|E|}}$, то $T = 2\pi \frac{k}{(\sqrt{2|E|})^3}$;
 но $2|E| = \frac{k}{a}$ и $T = 2\pi a^{3/2} k^{-1/2}$.

Задача. При запуске спутника на круговую орбиту на расстоянии 300 км от Земли направление скорости отклонилось от расчетного на 1° в сторону к Земле. Как изменится перигей?

задача. Как изменится высота перигея, если набранная скорость будет на 1 м/сек меньше расчетной?

Движение точки в 3-х мерном пространстве

Все результаты, полученные для движения в плоскости переносятся на этот случай.

Рассмотрим движение в потенциальном поле

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \quad \text{где } U = U(\mathbf{r})$$

I. Для того, чтобы силовое поле было потенциально, необходимо и достаточно, чтобы его работа на пути ℓ не зависела от формы пути ℓ , а зависела только от концов пути.

т.е. $\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$ эквивалентно

$$\int_{AB} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \Phi(A, B)$$

II. Полная энергия движения по определению

$$E = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{r}})^2 + U(\mathbf{r})$$

Имеет место закон сохранения энергии: $\frac{dE}{dt} = 0$.

III. Моментом количества движения назовем $\mathbf{M} = [\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}]$.

Закон сохранения момента количества движения.

При движении в центральном поле вектор $\mathbf{M}$ не меняется:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = 0$$

Всякое центральное поле потенциально, (доказывается как в двумерном случае) и

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}] + [\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}] = 0$$

т.к. $\ddot{z} = -\frac{\partial u}{\partial z}$, а вектор $\frac{\partial u}{\partial z}$ коллинеарен z ввиду центральности поля.

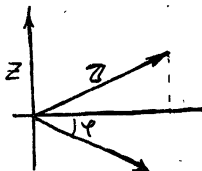
Следствие. При движении в центральном поле всякая орбита плоская.

Доказательство.

$(M, z) = (z, \dot{z})z = 0$ сл. $z(t) \perp M$, а т.к. $M = \text{const}$ то вся орбита лежит в плоскости $\perp$ к M .

Осесимметричное поле.

Поле имеет осевую симметрию, если $u(z) = u(z, z)$ (где (z, φ, z) цилиндрические координаты). Это означает, что вектор силы лежит в плоскости, переходящей через ось z .



Пример такого поля: поле заряженного проводника в поле тяготения Земли.

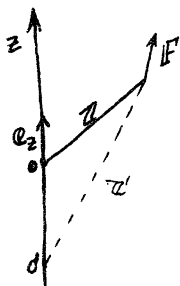
Определение. Моментом M_z вектора F относительно оси z называется проекция на эту ось вектора момента F относительно какойнибудь точки оси z :

$$M_z = (e_z [z \times F])$$

где e_z есть орт оси z .

Момент вектора F относительно оси z есть проекция вектора $M = [z \times F]$ на ось z , т.е. $M_z = (e_z [z \times F])$, где e_z есть орт оси z .

Очевидно M_z не зависит от выбора точки O на оси z .



Рассмотрим точку O' на оси
тогда по свойству смешанного про-
изведения: $M'_z = (e_z [r' \times F]) =$
 $([e_z \times r'], F) = ([e_z \times r], F) = M_z$

Замечание. M_z зависит от выбора направления оси z :
если изменить e_z на $-e_z$, то M_z изменит знак.

ТЕОРЕМА. При движении в поле с осевой симметрией вокруг
оси z (т.е. $U(z) = U(z, z)$) момент количества дви-
жения относительно оси z сохраняется.

Доказательство: $M_z = (e_z [z \times \dot{z}])$
 $\dot{M}_z = (e_z, [\dot{z} \times \dot{z}]) + (e_z [z \times \ddot{z}]) = 0$

т.к. $\ddot{z} = F$, следовательно, z и $\ddot{z}$ лежат в плоскос-
ти, проходящей через ось z , следовательно, $[z \times \ddot{z}]$ -
перпендикулярно e_z .

ЛЕКЦИЯ 6.

Движение системы n точек

Пусть мы имеем n точек с массами $m_1, \dots, m_n$; их
радиусы-векторы обозначим $r_1, \dots, r_n$;
скорости их $\dot{r}_1, \dots, \dot{r}_n$;
ускорения $\ddot{r}_1, \dots, \ddot{r}_n$

Уравнение Ньютона гласит

$$m_i \ddot{x}_i = F_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Силы F_i определяются экспериментально. Наблюдения показывают, что часто в системе из 2-х точек эти силы равны по величине, действуют вдоль прямой, соединяющей точки, и противоположно направлены.

Такие силы называются силами взаимодействия. (пример: силы всемирного тяготения).

Если все силы, действующие на точки системы, есть силы взаимодействия, то система называется замкнутой. В замкнутой системе сила, действующая на i -ую точку F_i есть

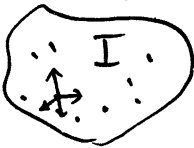
$$F_i = \sum_{j \neq i}^n F_{ij}$$

где F_{ij} есть сила, с которой j -ая точка действует на i -ую.

Так как силы F_{ij} и F_{ji} противоположны ($F_{ij} = -F_{ji}$), то можно записать их в виде $F_{ij} = f_{ij} \frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|}$ где $f_{ij} = f_{ji}$ величина силы, а $\frac{x_i - x_j}{|x_i - x_j|}$ - орт направления от j -ой точки на i -ую. Если система не замкнута, то часто можно представить действующие на нее силы в виде $F_i = \sum F_{ij} + F_i'$, где F_{ij} - силы взаимодействия, а F_i' - т.н. внешние силы.

Пример.

Разобьем замкнутую систему на 2 части I и II. Сила F_i , приложенная к i -ой точке системы, I, опреде-



ляется силами взаимодействия внутри системы I и силами, действующими на i -ую точку со стороны точек системы II, т.е.

$$F_i = \sum_{\substack{j \in I \\ i \neq j}} F_{ij} + F_i'$$

F_i' есть внешняя сила по отношению к системе I.

Определение. Количеством движения системы называется вектор

$$P = \sum_{i=1}^n m_i \dot{z}_i$$

ТЕОРЕМА. Скорость изменения количества движения системы равна сумме всех внешних сил, действующих на точки системы.

Доказательство.

$$\frac{dP}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \ddot{z}_i = \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i,j} F_{ij} + \sum_i F_i' = \sum_i F_i'$$

Действительно, $\sum_{i,j} F_{ij} = 0$, т.к. для сил взаимодействия $F_{ij} = -F_{ji}$.

Следствие I. Количество движения замкнутой системы сохраняется.

Действительно, все силы суть силы взаимодействия:

$$\frac{dP}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad P = \text{const}.$$

Следствие 2. Если сумма внешних сил, действующих на систему, перпендикулярна оси x , то проекция P_x количества движения на ось x сохраняется: $P_x = \text{const}$.

Определение. Центром инерции системы называется точка

$$Q = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

Задача. Доказать, что центр инерции определен корректно,

т.е. не зависит от выбора начала отсчета радиус-векторов. [Количество движения системы равно количеству движения точки, лежащей в центре инерции системы и имеющей массу, равную $\sum m_i$.

В самом деле, $\vec{r} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$ ($\sum m_i$) $\vec{r} = \sum m_i \vec{r}_i$
откуда $(\sum m_i) \dot{\vec{r}} = \sum m_i \dot{\vec{r}}_i$.

Мы можем теперь сформулировать теорему о количестве движения как теорему о движении центра инерции.

ТЕОРЕМА. Центр инерции системы движется так, как если бы все массы были сосредоточены в нем и все силы были приложены к нему.

Доказательство. $(\sum m_i) \dot{\vec{r}} = \vec{P}$

$$, \text{ поэтому } (\sum m_i) \ddot{\vec{r}} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_i ,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если система **замкнута**, то центр инерции ее движется равномерно и прямолинейно.

Определение. Кинетический момент материальной точки относительно точки O есть момент вектора количества движения относительно точки O .

$$M = [\vec{r} \times m \dot{\vec{r}}]$$

Кинетическим моментом системы относительно точки O называется сумма кинетических моментов точек системы

$$M = \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i]$$

ТЕОРЕМА. Скорость изменения кинетического момента системы равна сумме моментов внешних сил, действующих на точки системы.

Доказательство.

$$\frac{dM}{dt} = \sum_{i=1}^n [\dot{\vec{r}}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i] + \sum_{i=1}^n [\vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i]$$

Первое слагаемое 0, а второе, согласно уравнениям Ньютона равно

$$\sum_{i=1}^n [\tau_i \times F_i] = \sum_{i=1}^n [\tau_i \times (\sum_{j \neq i} F_{ij} + F_i')] = \sum_{i=1}^n [\tau_i \times F_i']$$

Действительно, сумма моментов двух сил взаимодействия равна 0, ибо

$$F_{ij} = -F_{ji}, [\tau_i \times F_{ij}] + [\tau_j \times F_{ji}] = [(\tau_i - \tau_j) \times F_{ij}] = 0$$

а поэтому сумма моментов всех сил взаимодействия

$$\sum_{i=1}^n [\tau_i \times \sum_{j \neq i} F_{ij}] = 0. \text{ Итак, } \frac{dM}{dt} = \sum_{i=1}^n [\tau_i \times F_i']$$

Что и требовалось доказать.

Следствие I. (Закон сохранения кинетического момента).

Если система изолирована, то $M = \text{const.}$

Доказательство очевидно.

Обозначим сумму моментов внешних сил через $N = \sum_{i=1}^n [\tau_i \times F_i']$

Тогда по доказанной теореме $\frac{dM}{dt} = N$

откуда

Следствие 2. Если момент внешних сил относительно оси Z равен 0, то M_z сохраняется.

Определение. Кинетической энергией точки массы называется

$$T = \frac{m \dot{r}^2}{2}$$

Определение. Кинетической энергией системы материальных точек называется величина $T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \dot{z}_i^2}{2}$

где m_i — массы точек, $\dot{z}_i$ — их скорости.

ТЕОРЕМА. Приращение кинетической энергии системы равно сумме работ всех сил, действующих на точки системы.

Доказательство.

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i (\dot{z}_i, \ddot{z}_i) = \sum_{i=1}^n (\dot{z}_i, m_i \ddot{z}_i) = \sum_{i=1}^n (\dot{z}_i, F_i)$$

Поэтому
$$T(t) - T(t_0) = \int_{t_0}^t \frac{dT}{dt} dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t (\dot{z}_i, F_i) dt = \sum_{i=1}^n A_i$$

т.к. $(\dot{z}_i, F_i) dt = (dz_i, F_i)$

ЛЕКЦИЯ 7.

Закон сохранения энергии

Обозначим через Z вектор $3n$ -мерного конфигурационного пространства системы из n точек $m_i \ddot{z}_i = F_i$. Компоненты вектора Z суть выписанные подряд компоненты $z_1, \dots, z_n$. Если определить аналогичным образом $3n$ -мерные вектора $\dot{Z}, \ddot{Z}, F$, то последняя теорема предыдущей лекции примет вид

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{Z(t_0)}^{Z(t_1)} (F, dZ) = \int_{t_0}^{t_1} (\dot{Z}, F) dt$$

Иными словами:

Приращение кинетической энергии равно работе $3n$ -мерной "силы" $\vec{F}$ на "пути" $\vec{z}(t)$ в конфигурационном пространстве.

Определение. Система называется потенциальной (или консервативной), если силы зависят только от положения точек системы, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{z})$, и работа $\vec{F}$ на любом пути зависит только от начальной и конечной точек пути:

$$\int_{M_1}^{M_2} (\vec{F}, d\vec{z}) = \Phi(M_1, M_2)$$

ТЕОРЕМА. Если система потенциальна, то существует потенциальная энергия, т.е. такая функция $U(\vec{z})$, что

$$\vec{F} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{z}}$$

Доказательство. Искомая функция дается формулой (ср. лекцию 3)

$$U(\vec{z}) = - \int_{\vec{z}_0}^{\vec{z}} (\vec{F}, d\vec{z})$$

Обратно, если известно, что $\vec{F} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{z}}$, то работа $\vec{F}$ зависит только от начальной и конечной точек пути:

$$\int_{M_1}^{M_2} (\vec{F}, d\vec{z}) = - [U(M_2) - U(M_1)]$$

Итак, для потенциальности системы необходимо и достаточно существование потенциальной энергии (ср. определение лекции I).

ТЕОРЕМА. Полная энергия потенциальной системы $E = T + U$ при движении сохраняется: $E(t_1) = E(t_0)$.

Доказательство. По доказанному выше

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{\vec{z}(t_0)}^{\vec{z}(t_1)} (\vec{F}, d\vec{z}) = U(\vec{z}(t_1)) - U(\vec{z}(t_0))$$

Пример. Пусть все силы, действующие на точки системы, делятся на силы взаимодействия и внешние силы:

$$F_i = \sum_{j \neq i} F_{ij} + F_i'$$

где $F_{ij} = -F_{ji} = f_{ij} \frac{z_i - z_j}{|z_i - z_j|}$

Утверждение. Если силы взаимодействия зависят только от расстояний, $f_{ij} = f_{ij}(|z_i - z_j|)$, то они потенциальны.

Доказательство. Если система состоит всего из двух точек i, j , то как легко проверить, потенциальная энергия взаимодействия дается формулой

$$u_{ij}(z) = - \int_{z_0} f_{ij}(\rho) d\rho$$

Действительно, тогда

$$- \frac{\partial u_{ij}(|z_i - z_j|)}{\partial z_i} = f_{ij} \cdot \frac{\partial |z_i - z_j|}{\partial z_i} = f_{ij} \frac{\partial \sqrt{(z_i - z_j)^2}}{\partial z_i} = f_{ij} \frac{z_i - z_j}{|z_i - z_j|}$$

Поэтому потенциальная энергия взаимодействия всех точек будет

$$u(z) = \sum_{i,j} u_{ij}(|z_i - z_j|) \quad . \text{ Утверждение доказано.}$$

Если и внешние силы потенциальны, т.е. $F_i' = - \frac{\partial u_i'}{\partial z_i}$, то система потенциальна и ее полная потенциальная энергия

$$u(z) = \sum_{i,j} u_{ij} + \sum_i u_i'$$

Для такой системы сохраняется полная механическая энер-

гия $E = T + u = \sum_i m_i \frac{\dot{z}_i^2}{2} + \sum_{i,j} u_{ij} + \sum_i u_i'$

Если же система не потенциальная, то полная механическая энергия, вообще говоря, не сохраняется.

Определение. Уменьшение механической энергии

$$E(t_0) - E(t_1) \quad \text{называется приращением немеханической}$$

энергии E' : $E'(t_1) - E'(t_0) = E(t_0) - E(t_1)$

ТЕОРЕМА (Закон сохранения энергии). Полная энергия $H = E + E'$ сохраняется.

Разумеется, эта теорема — очевидное следствие предыдущего определения. Ее значение состоит в том, что в конкретных физических системах для величины немеханической энергии E' найдены выражения через другие физические величины (температуру и т.п.).

Большинство задач о движении систем материальных точек не поддается точному решению. Решено лишь несколько простейших задач. В том числе

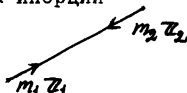
Задача двух тел

Пусть 2 точки с массами m_1 , m_2 взаимодействуют с потенциалом U , так, что уравнения движения имеют вид

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_1} \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_2} \quad U = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$$

Обозначим через $\mathbf{r}_0$ радиус-вектор центра инерции

$$\mathbf{r}_0 = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$



Согласно теореме о сохранении количества движения (лекция 6) точка $\mathbf{r}_0$ движется равномерно и прямолинейно.

Рассмотрим теперь вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Умножая первое из уравнений движения на m_2 , второе на m_1 и вычитая, находим $m_1 m_2 \ddot{\mathbf{r}} = - (m_1 + m_2) \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$

, где $U = U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) = U(|\mathbf{r}|)$

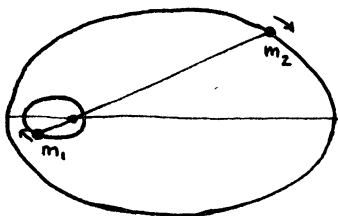
Доказана

ТЕОРЕМА. Изменение $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ в задаче двух тел

Такое же, как при движении точки массы $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ в поле с потенциалом $U(r)$.

В частности, в случае Ньютоновского притяжения точки описывают вокруг их общего центра тяжести конические

сечения с фокусом в центре тяжести:



Задача: Определить большую полуось эллипса, который описывает центр Земли вокруг общего центра тяжести Земли и Луны. Где расположен этот центр тяжести:

внутри Земли или вне? (масса Луны в 81 раз меньше массы Земли).

Соображения подобия

В некоторых случаях важную информацию можно получить не решая уравнений движения, из одного их вида, используя так называемые соображения подобия и размерности. Сущность этих соображений состоит в том, что уравнения движения не меняют своего вида при изменении единиц измерения, т.е. при изменении масштабов (времени, длины, массы и т.д.).

Пример. Пусть $r(t)$ удовлетворяет уравнению

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

положим $t_1 = \alpha t$, $m_1 = \alpha^2 m$. Тогда $r(t_1)$ удовлетворяет уравнению

$$m_1 \frac{d^2 r}{dt_1^2} = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

Иными словами:

Если уменьшить массу точки в 4 раза, то на прохождение той же орбиты в том же силовом поле ей потребуется вдвое меньше времени.*)

Задача. Пусть потенциальная энергия центрального поля - однородная функция степени ν :

$$U(\alpha z) = \alpha^\nu U(z) \quad \text{для любого } \alpha > 0.$$

Доказать, что если кривая γ есть траектория движения, то гомотетичная кривая $\alpha\gamma$ также есть траектория (при соответствующих начальных условиях). Определить отношение времен обращения по этим траекториям.

ЛЕКЦИЯ 8.

Вариационное исчисление

Для дальнейшего нам потребуются некоторые сведения из вариационного исчисления. Более подробное изложение см., например, в учебниках Л.А.Люстерника и М.А.Лаврентьева "Вариационное исчисление", или Г.Е.Шилова "Анализ". Специальный курс".

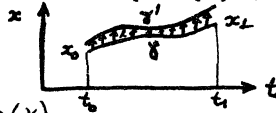
Вариационное исчисление занимается отысканием экстремумов функций бесконечного числа переменных, т.е. функций, область определения которых - бесконечномерное пространство: пространство кривых. Такие функции называются функционалами.

Примером функционала является, например, длина кривой $\gamma: \{t, x: x(t) = x; t_0 \leq t \leq t_1\}$ $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1+x'^2} dt$

*) Здесь предполагается, что U от m не зависит. В поле тяготения потенциальная энергия U пропорциональна m и поэтому период не зависит от массы движущейся точки m .

Вообще же функционалом $\Phi(\gamma)$ называется всякое отображение пространства кривых γ в числовую ось.

Рассмотрим близкую к γ кривую $\gamma' = \{t, x; x = x(t) + h(t)\}$. Будем обозначать ее $\gamma' = \gamma + h$. Рассмотрим приращение функционала Φ , $\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma)$.



Определение. Функционал $\Phi(\gamma)$ называется дифференцируемым, если $\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma) = F(h) + R$ $F(h) = F(h, \gamma)$; $R = R(h, \gamma)$

где F зависит от h линейно (т.е. $F(h_1 + h_2) = F(h_1) + F(h_2)$), а $R = O(h^2)$, в том смысле, что из $|h| < \varepsilon$, $|\frac{dh}{dt}| < \varepsilon$ вытекает $|R| < C\varepsilon^2$. Линейная часть приращения, $F(h)$ называется дифференциалом.

Можно доказать, что если функционал Φ дифференцируем, то его дифференциал определен однозначно. Дифференциал функционала называют также его вариацией, а h называют вариацией кривой.

Пример. Пусть $\gamma = \{x, t; x = x(t), t_0 \leq t \leq t_1\}$ - кривая на плоскости t, x , $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $L(a, b, c)$ - дифференцируемая функция трех переменных. Составим функционал

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt.$$

Например, в частном случае $L = \sqrt{1 + \dot{x}^2}$ получаем длину кривой γ .

ТЕОРЕМА. Функционал $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$ дифференцируемый, и его дифференциал дается формулой

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0}^{t_1}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\Phi(\delta+h) - \Phi(\delta) &= \int_{t_0}^{t_1} [L(x+h, \dot{x}+\dot{h}, t) - L(x, \dot{x}, t)] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right] dt + O(h^2) = F(h) + R\end{aligned}$$

$$\text{где } F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt, \quad R = O(h^2).$$

Интегрируя по частям, находим

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} dt = - \int_{t_0}^{t_1} h \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) dt + \left(h \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \Big|_{t_0}^{t_1}$$

Теорема доказана.

Определение. Экстремалью дифференцируемого функционала $\Phi(\gamma)$ называется такая кривая γ , что $F(h, \gamma) = 0$ при любом h .

(Точно так же как x стационарная точка функции, если в этой точке дифференциал равен 0).

ТЕОРЕМА. Чтобы кривая $\gamma: x = x(t)$ была экстремалью функционала $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$ на пространстве кривых, проходящих через точки $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, необходимо и достаточно, чтобы вдоль кривой $x(t)$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

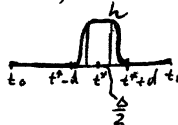
ЛЕММА. Если непрерывная функция $f(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ такова, что $\int_{t_0}^{t_1} f(t) h(t) dt = 0$

для любой непрерывной функции $h(t)$, $h(t_0) = h(t_1) = 0$, то $f(t) \equiv 0$.

Доказательство леммы. Пусть $f(t^*) > 0$, $t_0 < t^* < t_1$.

В силу непрерывности $f(t) > c$ в некоторой окрестности Δ точки t^* : $t_0 < t^* - d < t < t^* + d < t_1$; пусть $h(t) = 0$ вне Δ , $h(t) > 0$ в Δ и $h(t) = 1$ в $\frac{\Delta}{2}$ ($t^* - \frac{d}{2} < t < t^* + \frac{d}{2}$). Тогда очевидно $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt \geq dc > 0$.

Полученное противоречие доказывает, что $f(t^*) = 0$ для всех $t_0 < t^* < t_1$, что и требовалось.



Доказательство теоремы. По предыдущей теореме

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right] h dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right) \Big|_{t_0}^{t_1}$$

Внеинтегральный член равен 0, так как $h(t_0) = h(t_1) = 0$.

Если γ - экстремаль, то $F(h) = 0$ при всех h , для которых $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Поэтому при всех таких $h(t)$

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0, \text{ где } f(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x}$$

По лемме $f(t) \equiv 0$, что и требовалось доказать. Обратно, если $f(t) \equiv 0$, то, очевидно, $F(h) \equiv 0$. Теорема доказана.

Пример. Проверим, что экстремали длины - прямые. Имеем:

$$L = \sqrt{1 + \dot{x}^2}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \right) = 0,$$

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} = c; \quad \dot{x} = c; \quad x = ct + c_2$$

Определение.

уравнение

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

называется уравнением Эйлера-Лагранжа для функционала

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt$$

Пусть теперь $\mathcal{X}$ - вектор n -мерного пространства,
 $\gamma: \{t, \mathcal{X}; \mathcal{X} = \mathcal{X}(t)\}$, $t_0 \leq t \leq t_1$ - кривая $n+1$ мер-
 ного пространства $t, \mathcal{X}$, $L(\alpha, \beta, c)$ - функция $2m+1$
 аргумента. Аналогично предыдущей доказываемся

ТЕОРЕМА. Чтобы кривая γ была экстремалью функцио-
 нала $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathcal{X}, \dot{\mathcal{X}}, t) dt$

на пространстве кривых $\mathcal{X}(t)$, соединяющих две данные точки
 $(t_0, \mathcal{X}_0)$; $(t_1, \mathcal{X}_1)$, необходимо и достаточно выполнени●
 вдоль нее уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathcal{X}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathcal{X}} = 0$$

Это - система n уравнений второго порядка, и решение за-
 висит от $2m$ произвольных постоянных. Для нахождения их
 служат $2m$ условий $\mathcal{X}(t_0) = \mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}(t_1) = \mathcal{X}_1$

Важное замечание. Свойство кривой γ быть экстре-
 малью функционала не зависит от выбора системы координат.
 Например, один и тот же функционал - длина кривой - в декар-
 товых и полярных координатах дается разными формулами

$$\Phi_{\text{дек}} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} dt \quad \Phi_{\text{пол}} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{z}^2 + z^2 \dot{\varphi}^2} dt$$

Экстремали одни и те же - прямые линии на плоскости. Уравне-
 ния прямых в декартовых и полярных координатах задаются раз-
 личными функциями $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$;
 $z = z(t)$, $\varphi = \varphi(t)$. Однако и те, и другие функции удовлетворяют
 уравнению Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

только в первом случае $x_{\text{ген.}} = x_1, x_2$; $L_{\text{ген.}} = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}$
а во втором - $x_{\text{ген.}} = z, \varphi$; $L_{\text{ген.}} = \sqrt{\dot{z}^2 + z^2 \dot{\varphi}^2}$.

Таким образом, мы легко можем написать дифференциальное уравнение семейства всех прямых в полярных координатах (или в любых иных).

Сравним теперь уравнения динамики Ньютона

$$\frac{d}{dt}(m_i \dot{z}_i) + \frac{\partial U}{\partial z_i} = 0 \quad (I)$$

с уравнением Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

ТЕОРЕМА. Траектории движения механической системы (I) являются экстремальными функционала $\Phi(x) = \int_{t_0}^t L dt$
, где $L = T - U$ - разность
кинетической и потенциальной энергии.

Доказательство. Так как $U = U(x)$, $T = \sum m_i \frac{\dot{z}_i^2}{2}$
имеем $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i} = m_i \dot{z}_i$, $\frac{\partial L}{\partial z_i} = - \frac{\partial U}{\partial z_i}$.

Что и требовалось.

Следствие. Пусть $q_1, \dots, q_{3n}$ - любые координаты в конфигурационном пространстве системы n материальных точек. Тогда изменение q со временем подчиняется уравнениям Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad \text{где} \quad L = T - U$$

Доказательство. По предыдущей теореме траектория — экстремаль функционала $\int L dt$. Следовательно, в любой системе координат q она удовлетворяет записанному в этой системе координат уравнению Эйлера-Лагранжа, что и требовалось доказать.

Определение. В механике приняты следующие наименования:

$L(q, \dot{q}, t)$ — Т-функция Лагранжа, Лагранжиан

q обобщенные координаты

$\dot{q}$ обобщенные скорости

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$ обобщенные импульсы

$\frac{\partial L}{\partial q}$ обобщенные силы

$\int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t) dt$ действие

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$ уравнение Лагранжа.

ЛЕКЦИЯ 9.

Последняя теорема предыдущей лекции называется "принципом наименьшего действия в форме Гамильтона". Дело в том, что в некоторых случаях траектория $q(t)$ является не только экстремалью, но и доставляет наименьшее значение функционалу действия $\int_{t_0}^{t_1} L dt$.

Пример I. Для свободной материальной точки

$$L = T = \frac{m \dot{z}^2}{2}$$

в декартовых координатах $q_i = z_i$ находим

$$L = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)$$

Здесь обобщенные скорости — компоненты вектора скорос-

ти, обобщенные импульсы $p_i = m\dot{q}_i$ — компоненты вектора количества движения; уравнения Лагранжа совпадают с уравнениями Ньютона $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{0}$. Экстремали являются прямыми линиями. Из принципа Гамильтона следует, что прямые являются не только кратчайшими (т.е. экстремалими длины $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2} dt$) но и экстремалими действия $\int_{t_0}^{t_1} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) dt$

Задача. Докажите, что этот экстремум есть минимум.

Пример 2. Рассмотрим движение в плоском центральном поле в полярных координатах $q_1 = r, q_2 = \varphi$. Из соотношения $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + \dot{\varphi}r\mathbf{e}_\varphi$ находим кинетическую энергию $T = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$

и Лагранжиан $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$ $U = U(q_1)$

Обобщенные импульсы будут $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$, т.е.

$$p_1 = m\dot{r}, \quad p_2 = mr^2\dot{\varphi}$$

Первое уравнение Лагранжа $\dot{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial r}$ принимает вид

$$m\ddot{r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}$$

Это уравнение мы уже получали в лекции 4.

Так как $q_2 = \varphi$ не входит в L , имеем $\frac{\partial L}{\partial q_2} = 0$.

Поэтому второе уравнение Лагранжа будет $\dot{p}_2 = 0$, $p_2 = \text{const}$.

Это — закон сохранения кинетического момента.

В общем случае, когда поле не центральное, $U = U(r, \varphi)$, находим $p_2 = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}$

Это уравнение можно переписать в виде $\frac{d}{dt}(m\dot{\varphi}) = N$,
где $N = ([z, F]e_z)$, $F = -\frac{\partial U}{\partial z}$.

(скорость изменения кинетического момента относительно оси z равна моменту силы $\vec{F}$ относительно оси z).

Действительно, имеем $dM_z = \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi = -(\vec{F}, d\vec{z}) = -(\vec{F}, \vec{e}_z) dz - z(\vec{F}, \vec{e}_\varphi) d\varphi$

поэтому $-\frac{\partial u}{\partial \varphi} = z(\vec{F}, \vec{e}_\varphi) = z([\vec{e}_z, \vec{F}], \vec{e}_z) = ([z, \vec{F}], \vec{e}_z)$

Разобранный пример подсказывает следующее обобщение закона сохранения кинетического момента.

Определение. Координата q_i называется циклической, если она не входит в функцию Лагранжа: $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

ТЕОРЕМА. Обобщенный импульс, соответствующий циклической координате, сохраняется: $p_i = \text{const}$.

Доказательство. Согласно уравнению Лагранжа

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

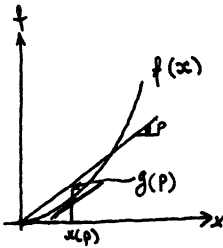
что и требовалось доказать.

В лекции 4 мы свели задачу о движении в центральном поле к некоторой одномерной задаче. Оказывается, в каждом случае, когда система имеет циклическую координату, можно свести задачу к задаче о движении системы с меньшим числом "степеней свободы", т.е. с меньшим числом координат q_i ; чтобы сделать это, нам потребуется математический прием, полезный также и в совсем других областях математики и физики — преобразование Лежандра.

Преобразование Лежандра.

пусть $f(x)$ - выпуклая функция,
 $f''(x) > 0$.

Преобразованием Лежандра $f(x)$ называется новая функция $g(p)$ ^{превращенного} нового p , которая строится следующим образом.



Пусть дано p . Рассмотрим прямую $y = px$. Возьмем точку $x = x(p)$, в которой кривая всего дальше от прямой:
 $px - f(x) = F(p, x)$

в точке $x(p)$ имеет максимум по x при фиксированном p ;
 тогда $g(p) = F(p, x(p))$

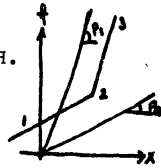
Точка $x(p)$ определяется из условия экстремума:
 $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, т.е. $f'(x) = p$. Ввиду выпуклости
 такая точка $x(p)$ единственна.

Пример 1. Пусть $f(x) = x^2$. Тогда $F(p, x) = px - x^2$,
 $x(p) = \frac{p}{2}$, $g(p) = \frac{1}{4}p^2$

Пример 2. Пусть $f(x) = \frac{mx^2}{2}$. Тогда $g(p) = \frac{p^2}{2m}$.

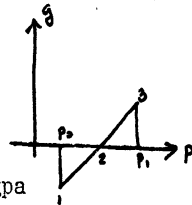
Пример 3. Пусть $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$. Тогда $g(p) = \frac{x^\beta}{\beta}$,
 где $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ ($\alpha > 1, \beta > 1$)

Пример 4. Пусть $f(x)$ - выпуклая ломаная.
 Тогда $g(p)$ - тоже выпуклая ломаная, причем
 вершинам $f(x)$ соответствуют отрезки $g(p)$,
 а отрезкам $f(x)$ вершины $g(p)$. Например, угол,
 изображенный на чертеже, при преобразовании Ле-



жандра переходит в отрезок.

В дальнейшем будем считать функцию f нужное число раз дифференцируемой, а $f''(x) > 0$. Легко проверить, что преобразование Лежандра переводит выпуклые функции в выпуклые. Поэтому его можно применить дважды.



ТЕОРЕМА. Преобразование Лежандра инволютивно, т.е. его квадрат равен тождественному преобразованию: если $f(x)$ при преобразовании Лежандра переходит в $g(p)$, то преобразование Лежандра от $g(p)$ будет снова $f(x)$.

Доказательство.

Чтобы сделать преобразование Лежандра от $g(p)$, мы должны, по определению, рассмотреть новое независимое переменное (обозначим его через x), составить функцию

$$G(x, p) = xp - g(p)$$

найти точку $p(x)$, в которой G имеет максимум:

$$\frac{\partial G}{\partial p} = 0, \text{ т.е. } g'(p) = x$$

и тогда преобразование Лежандра $g(p)$ будет функцией от x

$$G(x, p(x))$$

Докажем, что $G(x, p(x)) = f(x)$.

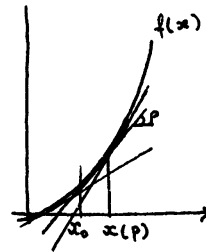
С этой целью заметим, что $G(x, p) =$

$$= xp - g(p) \quad \text{имеет простой}$$

геометрический смысл: это ордината касательной к графику $f(x)$,

имеющей наклон p , при абсциссе x .

Действительно, при фиксированном p $G(x, p)$



линейная функция от x , $\frac{\partial G}{\partial x} = p$ и при $x = x(p)$ имеем
 $G(x, p) = px - g(p) = f(x)$ по определению $g(p)$.

Зафиксируем теперь $x = x_0$ и будем менять p . Тогда значения $G(x, p)$ будут ординатами точек пересечения прямой $x = x_0$ с касательными к графику $f(x)$, имеющими разный наклон p . Из выпуклости графика следует, что все эти касательные лежат ниже кривой, а потому максимум $G(x, p)$ при фиксированном $x(p_0)$ равен $f(x)$ (и достигается при $p = p(x_0) = f'(x_0)$).

Следствие. Пусть дано семейство прямых $y = px - g(p)$. Тогда огибающая имеет уравнение $y = f(x)$, где $f(x)$ — преобразование Лежандра функции $g(p)$.

Определение. Две функции $f(x)$, $g(p)$ являющиеся преобразованиями Лежандра друг друга, называются двойственными по Юнгу.

По определению преобразования Лежандра
 $F(x, p) = px - f(x) \leq g(p)$ при любых x, p .

Отсюда вытекает неравенство Юнга.

$$px \leq f(x) + g(p)$$

Пример 1. Если $f(x) = \frac{x^2}{2}$, то $g(p) = \frac{p^2}{2}$ и мы получаем известное неравенство $px \leq \frac{x^2}{2} + \frac{p^2}{2}$ для всех x, p .

Пример 2. Если $f(x) = \frac{x^\alpha}{\alpha}$, то $g(p) = \frac{p^\beta}{\beta}$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, и мы получаем неравенство Юнга $px \leq \frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{p^\beta}{\beta}$

для всех $x > 0, p > 0, \alpha > 1, \beta > 1, \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.

Случай многих переменных

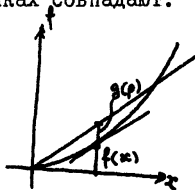
Пусть теперь $f(x)$ - выпуклая функция векторного переменного $x = x_1, \dots, x_n$ (т.е. квадратичная форма $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j)$ положительно определена). Тогда преобразованием Лежандра называется функция $g(p)$ векторного переменного $p = p_1, \dots, p_n$, определенная аналогичным предыдущим равенствами $g(p) = F(p, x(p))$,

$$F(p, x) = (px) - f(x), \quad p = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Все предыдущие рассуждения, в том числе неравенства Юнга, без изменений переносятся на этот случай.

Задача. Пусть $f(x)$ - квадратичная форма: $f(x) = \sum f_{ij} x_i x_j$. Показать, что ее преобразование Лежандра есть снова квадратичная форма $g(p) = \sum g_{ij} p_i p_j$, причем значения обеих форм в соответствующих точках совпадают:

$$f(x(p)) = g(p), \quad g(p(x)) = f(x)$$



ЛЕКЦИЯ 10.

Уравнения Гамильтона

В прошлых лекциях мы убедились, что в любой системе координат $q_1, \dots, q_n$ движение механической системы описывается уравнениями Лагранжа

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}, \quad \text{где} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \quad L = L(q, \dot{q}, t) = T - U$$

Это — система n уравнений второго порядка относительно функций $q(t)$:

Оказывается, после преобразования Лежандра система уравнений Лагранжа переходит в замечательно симметричную систему $2n$ уравнений первого порядка — систему уравнений Гамильтона (или канонических уравнений) относительно функций $p(t)$, $q(t)$.

ТЕОРЕМА. Система уравнений Лагранжа эквивалентна системе $2n$ уравнений I порядка:

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

где $H = H(p, q, t) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t)$ есть преобразование Лежандра функции Лагранжа, рассматриваемой как функция $\dot{q}$.

Доказательство.

По определению, преобразование Лежандра $L(q, \dot{q}, t)$ по $\dot{q}$ есть функция $H(p) = p\dot{q} - L(\dot{q})$, в которой $\dot{q}$ выражено через p по формуле $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, и которая зависит еще от параметров q, t . Эта функция H называется функцией Гамильтона.

Полный дифференциал функции Гамильтона

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

равен полному дифференциалу $p\dot{q} - L$ при $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$:

$$dH = \dot{q} dp + p d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Оба выражения для dH должны совпадать. Поэтому

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

Принимая во внимание уравнение Лагранжа $\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$, получаем уравнения Гамильтона.

Итак, если $q(t)$ удовлетворяет уравнениям Лагранжа, то $(p(t), q(t))$ удовлетворяет уравнениям Гамильтона. Обратное доказывается аналогичным образом. Итак, системы Лагранжа и Гамильтона эквивалентны.

Замечание. Доказанная теорема относится ко всем вариационным задачам, а не только к Лагранжевым уравнениям механики.

Пример. Пусть уравнения все таки механические, и функция Лагранжа имеет обычный вид $L = T - U$, где кинетическая энергия T — квадратичная форма относительно $\dot{q}$:

$$T = \frac{1}{2} \sum a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad a_{ij} = a_{ij}(q, t), \quad U = U(q)$$

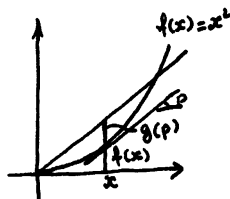
ТЕОРЕМА. При сделанных предположениях функция Гамильтона H есть полная энергия $H = T + U$.

доказательство основано на лемме о преобразовании Лежандра квадратичной формы.

ЛЕММА. Значения квадратичной формы $f(x)$ и ее преобразования Лежандра $g(p)$ в соответствующих точках совпадают: $f(x) = g(p)$.

Пример. Для формы $f(x) = x^2$ это известное свойство касательной к параболе:

$f(x) = g(p)$. Для формы $f(x) = \frac{mx^2}{2}$ имеем $p = mx$ и $g(p) = \frac{p^2}{2m} = \frac{mx^2}{2} = f(x)$



Доказательство леммы. По теореме Эйлера об однородных функциях (Хинчин, Краткий курс, § 93)

$$\frac{\partial f}{\partial x} x = 2f$$

Следовательно, $g(p(x)) = px - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} x - f = 2f(x) - f(x) = f(x)$
з. т. д.

Доказательство теоремы. Рассуждая как в лемме, находим

$$H = p\dot{q} - L = 2T - (T - U) = T + U$$

что и требовалось доказать.

Пример. Для одномерного движения

$$\ddot{q} = -\frac{\partial u}{\partial q}$$

В этом случае $T = \frac{1}{2}\dot{q}^2$, $u = u(q)$, $p = \dot{q}$, $H = \frac{p^2}{2} + u(q)$ и уравнения Гамильтона

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

Этот пример позволяет быстро вспомнить, в каком из двух уравнений Гамильтона стоит знак $-$.

Из теоремы об эквивалентности уравнений движения Гамильтоновой системы вытекает ряд важных следствий. Например, закон сохранения энергии принимает простой вид:

Следствие I. Справедливо равенство $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$

и, в частности, для систем, функция Гамильтона которых явно не зависит от времени ($\frac{\partial H}{\partial t} = 0$) ^(выполняется) закон сохранения функции Гамильтона $H(p(t), q(t)) = const$

Доказательство. Рассмотрим изменение H вдоль траек-

тории $H(p(t), q(t), t)$. Тогда в силу уравнений Гамильтона $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$ т.т.г.

Рассматривая центральное поле, мы заметили, что введением полярных координат задача сводится к одномерной. Оказывается, всякая симметрия задачи, позволяющая выбрать систему координат q так, чтобы от некоторых координат функция Гамильтона не зависела, позволяет найти некоторые первые интегралы и свести задачу к задаче с меньшим числом координат.

Определение. Если координата q_1 не входит в функцию Гамильтона $H(p_1, p_2, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n)$ так, что $\frac{\partial H}{\partial q_1} = 0$, то такая координата называется циклической (термин происходит от частного случая — угловая координата φ в центральном поле). Очевидно, q_1 циклическая тогда и только тогда, когда она не входит в функцию Лагранжа ($\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$). Из Гамильтонова вида уравнений движения вытекает

Следствие 2. Пусть q_1 — циклическая координата. Тогда p_1 — первый интеграл. При этом изменение остальных координат со временем такое, же, как в системе с $n-1$ независимой координатой $q_2, \dots, q_n$ и с функцией Гамильтона

$$H(p_2, \dots, p_n, q_2, \dots, q_n, c)$$

зависящей от параметра $c = p_1$.

Доказательство. Положим $p' = p_2, \dots, p_n$, $q' = q_2, \dots, q_n$. Тогда система Гамильтона примет вид

$$\frac{d}{dt} q' = \frac{\partial H}{\partial p'}$$

$$\frac{d}{dt} q_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}$$

$$\frac{d}{dt} p' = -\frac{\partial H}{\partial q'}$$

$$\frac{d}{dt} p_1 = 0$$

Последнее уравнение показывает, что $p_1 = \text{const}$. Поэтому в систему уравнений для p', q' величина p_1 входит лишь как параметр в функции Гамильтона. После того, как эта система

$2n-2$ уравнений решена, уравнение для q_1 принимает вид $\frac{d}{dt} q_1 = f(t)$, где $f(t) = \frac{\partial}{\partial p_1} H(p'(t), q'(t), p_1)$

и легко интегрируется.

Почти все решенные в механике задачи решаются с помощью следствия 2.

Следствие 3. Всякая система с двумя степенями свободы ($n=2$), имеющая циклическую координату, интегрируема.

Ибо в этом случае система для p', q' одномерная и немедленно интегрируется с помощью интеграла $H(p', q') = C$.

Теорема Лиувилля

ещё одного

В качестве следствия теоремы о Гамильтоновой форме мы докажем важную теорему Лиувилля. Рассмотрим для простоты случай, когда функция Гамильтона времени явно не содержит: $H = H(p, q)$.

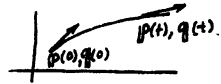
Определение. $2n$ -мерное пространство $p_1, \dots, p_n; q_1, \dots, q_n$ называется фазовым пространством.

Пример. В случае $n=1$ это — фазовая плоскость системы $\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$, рассмотренной в лекции I.

Так же как в этом простейшем примере, правые части уравнений Гамильтона задают векторное поле, в каждой точке p, q фазового пространства приложен $2n$ -мерный вектор $(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p})$.

Определение. Фазовым потоком называется однопараметрическая группа преобразований фазового пространства.

$$g^t: p(0), q(0) \rightarrow p(t), q(t),$$

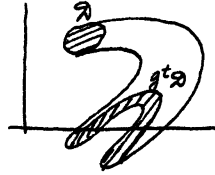


где $p(t), q(t)$ — решение системы уравнений Гамильтона.

Задача. Доказать, что g^t — группа.

ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ. Фазовый поток сохраняет объем: для любой области $\mathcal{D}$ имеем

$$\text{объем } g^t \mathcal{D} = \text{объем } \mathcal{D}$$



ЛЕКЦИЯ II

Доказательство теоремы Лиувилля

Докажем несколько более общее предложение, также принадлежащее Лиувиллю.

Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x)$ $x = x_1, \dots, x_n$.

Пусть g^t — соответствующая группа преобразований:

$$g^t(x) = x + f(x)t + O(t^2) \quad (t \rightarrow 0) \quad (I)$$

Пусть $\mathcal{D}(0)$ область в пространстве x и $V(0)$ — ее объем;

$$V(t) = \text{объем } \mathcal{D}(t), \quad \mathcal{D}(t) = g^t \mathcal{D}(0)$$

ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ. Если $\text{div } f \equiv 0$, то g^t сохраняет объем: $V(t) = V(0)$. Сначала докажем следующее.

ЛЕММА 1. Справедливо соотношение

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \int_{\Omega(0)} \operatorname{div} f dx \quad (dx = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$$

Доказательство. при любом t по определению якобиана

$$v(t) = \int_{\Omega(t)} \det \frac{\partial g^t x}{\partial x} dx$$

Вычисляя $\partial g^t x / \partial x$ по формуле (I), находим

$$\frac{\partial g^t x}{\partial x} = E + \frac{\partial f}{\partial x} t + O(t^2)$$

Воспользуемся теперь известным алгебраическим фактом:

ЛЕММА 2. Для любой матрицы $A = \|a_{ij}\|$ справедливо соотношение

$$\det |E + At| = 1 + t \operatorname{Sp} A + O(t^2)$$

где $\operatorname{Sp} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ — след матрицы A (сумма диагональных элементов). (Доказательство леммы 2 получается непосредственным раскрытием определителя: получается $1, n$ слагаемых с t , остальные с t^2, t^3 и т.д.).

Итак,

$$\det \frac{\partial g^t x}{\partial x} = 1 + t \operatorname{Sp} \frac{\partial f}{\partial x} + O(t^2)$$

Но $\operatorname{Sp} \frac{\partial f}{\partial x} = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} f$. Поэтому

$$v(t) = \int_{\Omega(t)} [1 + t \operatorname{div} f + O(t^2)] dx$$

что и доказывает лемму I.

Доказательство теоремы. Так как $t = t_0$ ничем не хуже

$t = 0$, лемму I можно записать в виде

$$\left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \int_{\Omega(t_0)} \operatorname{div} f dx$$

И если $\operatorname{div} f \equiv 0$, то и $\frac{dV}{dt} \equiv 0$, что и требовалось.

В частности, для системы Гамильтона имеем

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial q} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right) \equiv 0$$

Поэтому сформулированная в конце прошлой лекции теорема - частный случай доказанной.

Задача. Распространить теорему Лиувилля на случаи неавтономных систем ($H = H(p, q, t)$ или $f = f(x, t)$).

Теорема Лиувилля имеет многочисленные приложения.

Задача. Доказать, что в Гамильтоновой системе невозможно асимптотически устойчивое положение равновесия или асимптотически устойчивый предельный цикл в фазовом пространстве (см. Понтрягин, § 28).

Одним из приложений теоремы Лиувилля является так называемая статистическая механика. Упомяну еще одно, несколько неожиданное, следствие теоремы Лиувилля - теорему Пуанкаре.

Теорема Пуанкаре о возвращении

Пусть g - сохраняющее объем непрерывное взаимнооднозначное отображение, переводящее ограниченную область $\mathcal{D}$ в себя: $g\mathcal{D} = \mathcal{D}$.

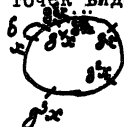
Тогда в любой окрестности U любой точки области $\mathcal{D}$ найдется точка $x \in U$, которая возвращается в область U , т.е. $g^n x \in U$ при некотором $n > 0$.

Эта теорема применима, например, к фазовому потоку g^t двумерной системы с потенциалом $U(x_1, x_2)$; в этом

с 2π , то теорема Пуанкаре дает $\forall \delta > 0 \exists n: |g^n x - x| < \delta$

Отсюда легко вытекает

ТЕОРЕМА. Если $\alpha \neq 2\pi \frac{m}{n}$, то множество точек вида $g^n x$ всюду плотно*) на окружности.



Пример 2. Пусть $\mathcal{D}$ — двумерный тор,

φ_1 и φ_2 — угловые координаты на нем

(широта и долгота).

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений на торе



$$\dot{\varphi}_1 = \alpha_1 \quad \dot{\varphi}_2 = \alpha_2$$

Очевидно, $\text{div} f = 0$, и соответствующее движение

$$g^t: \varphi_1, \varphi_2 \rightarrow \varphi_1 + \alpha_1 t, \varphi_2 + \alpha_2 t$$

сохраняет объем $d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$. Из теоремы Пуанкаре легко выводится

ТЕОРЕМА. Если α_1/α_2 иррационально, то "обмотка" тора $g^t(\varphi_1, \varphi_2)$ всюду плотна на торе.

Задача. Докажите, что если ω иррационально, то фигура Лиссажу $x = \cos t$, $y = \cos \omega t$ всюду плотна в квадрате $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$.

Пример 3. Пусть $\mathcal{D}$ n -мерный тор T^n , т.е. прямое произведение**) n окружностей

$$\mathcal{D} = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_n = T^n$$

*) Множество A всюду плотно в B , если в каждой окрестности каждой точки B есть точка A .

**) Прямое произведение множеств $A, B, \dots$ есть множество наборов точек $(a, b, \dots)$, $a \in A, b \in B, \dots$

Точка n -мерного тора задается n угловыми координатами $\varphi = \varphi_1, \dots, \varphi_n$. Пусть $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$, g^t - преобразование, сохраняющее объем

$$g^t: T^n \rightarrow T^n, \varphi \rightarrow \varphi + \alpha t$$

Задача. При каких условиях на α всюду плотны:

а) траектория $g^t \varphi$ б) траектория $g^{nt} \varphi$ ($t \in \mathbb{R}$ принадлежит группе вещественных чисел $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ - группе целых чисел $\mathbb{Z}$).

Преобразования примеров I-3 тесно связаны с механикой. Но так как теорема Пуанкаре абстрактная, она имеет и не связанные с механикой приложения.

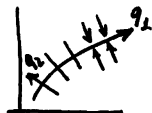
Пример 4. Рассмотрим первые цифры чисел 2^n
1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4 ...

Задача. Есть ли в этой последовательности цифра 7? и какая цифра встречается чаще: 7 или 8?

Теорема Лиувилля и теорема Пуанкаре о возвращении лежат в основу "Эргодической теории", с которой можно познакомиться по книжке Халмоза "Лекции по эргодической теории", ИЛ, 1959.

С в я з и

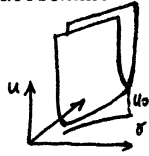
Начнем с примера. Пусть γ - гладкая кривая на плоскости. Если в окрестности γ имеется очень сильное силовое поле, направленное к кривой, то движущаяся точка будет все время находится вблизи γ . В предельном случае бесконечно-сильного поля точка вынуждена оставаться на кривой γ . В этом случае гово-



рят, что на систему наложена связь. Вообще, связи — это предельный случай бесконечно-сильных полей.

Введем в окрестности кривой γ криволинейные координаты q_1, q_2 : q_1 — вдоль кривой γ , q_2 — расстояние от кривой.

Рассмотрим систему с потенциальной энергией вида $u_N = Nq_2^2 + u_0$ $N \rightarrow \infty$



где $u_0(q_1, q_2)$ — обычная потенциальная энергия, а Nq_2^2 — энергия связи. Рассмотрим начальные условия на γ :

$$q_1(0) = q_1^0, \dot{q}_1(0) = \dot{q}_1^0, q_2(0) = 0, \dot{q}_2(0) = 0$$

Обозначим через $q_1 = q_1(t, N)$ координату q_1 при движении с такими начальными условиями в поле u_N .

ТЕОРЕМА. При $N \rightarrow \infty$ существует предел

$$\lim_{N \rightarrow \infty} q_1(t, N) = \bar{q}_1(t)$$

Предельная функция удовлетворяет уравнению Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_1}$$

где $\bar{L}(\bar{q}_1, \dot{\bar{q}}_1) = T|_{q_2=0} - u_0|_{q_2=0}$ (T — кинетическая энергия движения по γ).

Полное доказательство этой теоремы довольно длинно, сущность же его состоит в следующем. Рассмотрим некоторую область G , содержащую γ . Пусть в G имеем $|u_0| < c$. Тогда движение системы с потенциалом u_N удовлетворяет,

пока оно остается в G , "априорной оценке"

$$(q_2(t, N))^2 \leq \frac{T(0) + 2c}{N},$$

вытекающей из закона сохранения энергии

$$T(t) + u_0(t) + Nq_2^2 = T(0) + u_0(0)$$

и из того, что $|u_0| < c$, $T(t) > 0$.

Итак, $q_2 \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$ и точка остается вблизи γ .

Запишем теперь уравнения Лагранжа в координатах q_1, q_2 .

В ортогональной системе координат q_1, q_2 элемент длины дуги $ds^2 = a_1(q) dq_1^2 + a_2(q) dq_2^2$

откуда $T = \frac{1}{2} (a_1(q) \dot{q}_1^2 + a_2(q) \dot{q}_2^2)$, $p_1 = a_1(q) \dot{q}_1$, $p_2 = a_2(q) \dot{q}_2$

Уравнение Лагранжа для q_1

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1} (T - u_0)$$

при $q_2 = 0$ переходит в искомое

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_1}$$

Теперь для доказательства теоремы достаточно воспользоваться доказанной априорной оценкой q_2 , теоремой о непрерывной зависимости решения от первой части и тем фактом, что $q(t, N)$ остается в области G при $0 < t < t_0$, где t_0 не зависит от N .

Таким образом, при $N \rightarrow \infty$ система уравнений Лагранжа для $q(t, N)$ порождает уравнение Лагранжа для

$q_i(t)$. Точно такой же результат получится, если рассмотреть вместо плоскости — $3n$ -мерное пространство конфигураций n точек, составляющих механическую систему, с метрикой $ds^2 = \sum_{i=1}^n m_i d\vec{z}_i^2$ (m_i — массы)

вместо кривой γ — подмногообразие $3n$ -мерного пространства, вместо q_1 — какие-нибудь координаты q_1 на γ , вместо q_2 — координаты q_2 в направлении, перпендикулярном γ . Если потенциальная энергия имеет вид

$$u = u_0(q) + N q_2^2$$

то при $N \rightarrow \infty$ движение на γ определяется уравнениями Лагранжа с функцией Лагранжа

$$\bar{L} = T \Big|_{q_2=0} + u_0 \Big|_{q_2=0}$$

Определение. Пусть γ — поверхность в $3n$ -мерном конфигурационном пространстве точек $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n$ масс $m_1, \dots, m_n$. Пусть $q = q_1, \dots, q_m$ какие-нибудь координаты на γ : $\vec{z}_i = \vec{z}_i(q)$. Система, описываемая уравнениями

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad L = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{z}}_i^2 + u(q)$$

называется системой n точек, стесненной $3n - m$ голономными связями. Поверхность γ называется конфигурационным пространством системы со связями.

Голономную связь можно было бы определить и как предельный случай системы с большой потенциальной энергией. Значение этих связей для механики в том, что как показывает эксперимент большинство связей в природе с той или иной точностью относятся к этому классу.

В настоящих лекциях другие связи рассматриваться не будут.

ЛЕКЦИЯ 12.

Дифференцируемые многообразия

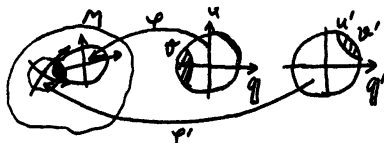
Для изложения вопросов, связанных с голономными системами и системами со связями, нам потребуется понятие дифференцируемого многообразия.

Дифференцируемое многообразие M есть множество, снабженное конечным или счетным набором карт, так что каждая точка принадлежит хотя бы одной карте.

Картой называется открытая область U в евклидовом координатном пространстве $q = q_1, \dots, q_n$, вместе со своим взаимнооднозначным отображением φ на некоторое подмножество M $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset M$.

Если какая-нибудь точка M имеет изображения на двух картах u, u' сразу, то то же должно быть справедливо для некоторых окрестностей V, V' этой точки на каждой из

карт. Таким образом, возникает отображение $\varphi^{-1}\varphi: V \rightarrow V'$ части одной карты $V \subset U$ на часть другой карты $V' \subset U'$.



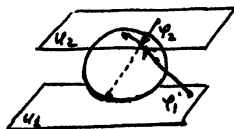
Это — отображение области V координатного евклидова пространства q на область V' координатного евклидова пространства q' , и оно задается n функциями n переменных $q' = q'(q)$, ($q = q(q')$). карты U, U' называются совместными, если эти функции дифференцируемы.

Атласом называется совокупность совместных друг с другом карт. Два атласа эквивалентны, если их объединение есть снова атлас.

дифференцируемое многообразие есть класс эквивалентности атласов. Мы будем рассматривать только связные многообразия^{*}). Тогда число n для всех карт одно и то же — оно называется размерностью многообразия.

Пример 1. Евклидово пространство R^n — есть многообразие, атлас которого состоит из единственной карты.

Пример 2. Сфера $S^2 = \{x, y, z: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ есть многообразие, атлас которого состоит, например, из двух карт в стереографической проекции. Аналогичная конструкция годится и для n -мерной сферы



$$S^n = \{x_1, \dots, x_{n+1}: \sum x_i^2 = 1\}$$

^{*}) Многообразие связно, если его нельзя разбить на два непересекающихся.

Пример 3. Рассмотрим плоский маятник. Конфигурационное пространство - окружность S^1 - есть многообразие.

Обычный атлас доставляется угловой координатой

$$\varphi: \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1, \quad u_1 = (-\pi, \pi), \quad u_2 = (0, 2\pi)$$



Пример 4. Конфигурационное пространство "сферического" математического маятника есть двумерная сфера S^2 .



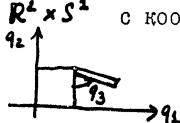
Пример 5. Конфигурационное пространство "плоского двойного маятника" есть прямое произведение двух окружностей, т.е. двумерный тор $T^2 = S^1 \times S^1$.



Пример 6. Конфигурационное пространство сферического двойного маятника есть прямое произведение двух сфер $S^2 \times S^2$.

Пример 7. Жесткий отрезок на плоскости q_1, q_2 имеет конфигурационным пространством многообразие $\mathbb{R}^2 \times S^1$ с координатами q_1, q_2, q_3 .

Оно покрывается двумя картами.



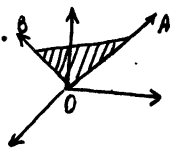
Пример 8. Жесткий прямоугольный треугольник OAB , вращающийся вокруг вершины O .

Положение треугольника задается тремя

числами. Действительно, направление $OA \in S^1$

задается двумя числами, а если OA задано,

можно еще вращать $OB \in S^1$ вокруг оси OA .



С положением треугольника OAB можно связать

ортонормированный правый репер $e_1 = \frac{OA}{|OA|}, e_2 = \frac{OB}{|OB|}, e_3 = [e_1, e_2]$.

Соответствие взаимно-однозначно, поэтому положение треуголь-

ника задается ортогональной матрицей 3 порядка с определителем 1, $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{13} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{31} & \dots & a_{33} \end{vmatrix} = 1$.

Множество всех матриц 3 порядка есть 9-мерное пространство R^9 . 6 условий ортогональности выделяют два трехмерных связанных многообразия матриц с определителем $+1$ и -1 . Вращения трехмерного пространства (определитель $+1$) образуют группу, которая обозначается $SO(3)$.

Таким образом, конфигурационное пространство треугольника OAB есть группа $SO(3)$.

Задача* Показать, что $SO(3)$ есть трехмерное вещественное проективное пространство.

Определение. Размерность конфигурационного пространства называется числом степеней свободы.

Пример 9. Рассмотрим систему из k шарнирно соединенных в замкнутую цепь стержней.

Задача. Сколько степеней свободы имеет эта система?

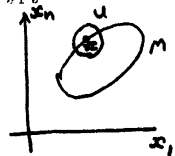
Пример 10. Вложенное многообразие.

Говорят, что M есть вложенное в евклидово пространство $R^n = \{x_1, \dots, x_n\}$ многообразие размерности k , если в окрестности u каждой точки $x \in M$ существуют

$n-k$ функций $f_1, \dots, f_{n-k}$ таких, что пересечение окрестности $u \in M$ задается уравнениями $f_1 = 0, \dots, f_{n-k} = 0$, и вектора $\text{grad } f_1, \dots, \text{grad } f_{n-k}$ в u

линейно независимы. Легко ввести на M структуру многообразия, т.е. координаты в окрестности x (как?).

Можно доказать, что всякое многообразие



можно вложить евклидово пространство.

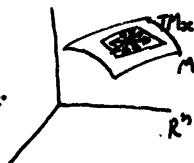
В примере 8 $SO(3)$ есть подмножество R^9 .

Задача. Доказать, что $SO(3)$ вложено в R^9 и тем самым проверить, что $SO(3)$ — многообразие.

Касательное пространство

Если M — вложенное в R^n k -мерное многообразие, то в каждой точке x оно имеет k -мерное касательное пространство, TM_x .

А именно, TM_x есть ортогональное дополнение к $\{\text{grad } f_1, \dots, \text{grad } f_{n-k}\}$. Вектора касательного пространства TM_x с началом в x называются касательными векторами к M в x . Эти вектора можно определить и непосредственно, как вектора скорости кривых на M



$$\dot{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x}{t}$$

где $x(0) = x$, $x(t) \in M$

Определение касательного вектора можно дать и во внутренних терминах, не обращаясь к вложению M в R^n .

Назовем две кривые $x(t)$, $y(t)$ на многообразии эквивалентными, если $x(0) = y(0) = x$, и $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t) - y(t)}{t} = 0$ на какой-нибудь карте. Тогда это же соотношение касания верно на любой карте (докажите!).

Определение. Касательным вектором к многообразию M в точке x называется класс эквивалентности кривых $x(t)$, $x(0) = x$

Легко определить операции умножения касательного вектора на число и сложения касательных векторов. Множество касательных векторов к M в x образует линейное пространство TM_x . Это пространство и называется касательным пространством к M в x .

Для вложенных многообразий введенное определение совпадает с предыдущим. Но его преимущество в том, что оно годится и для абстрактных, никуда не вложенных многообразий M .

Замечание. Пусть U — карта атласа M с координатами $q_1, \dots, q_n$. Тогда касательный вектор получает координаты $f_1, \dots, f_n$, где $f_i = \frac{dq_i}{dt} \Big|_{t=0}$.

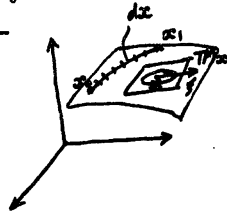
Риманово многообразие

Если M — вложенное в евклидово пространство многообразие, то метрика евклидова пространства позволяет измерять на M длины кривых, углы между векторами, объемы и т.п.

Все эти величины выражаются через длину касательных векторов, т.е. через положительно-определенную квадратичную форму, заданную на каждом касательном пространстве TM_x

$$TM_x \rightarrow \mathbb{R}: \xi \rightarrow \langle \xi, \xi \rangle$$

Например, длина кривой γ на многообразии выражается через эту форму как
$$l(\gamma) = \int_{x_0}^1 \sqrt{\langle dx, dx \rangle}$$



или, если кривая задана параметрически:

$$\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow M, \quad t \rightarrow x(t) \in M$$

то
$$l(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\langle \dot{x}, \dot{x} \rangle} dt$$

Определение. Дифференцируемое многообразие M с фиксированной положительно-определенной квадратичной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в каждом касательном пространстве TM_x называется Римановым многообразием. Эта квадратичная форма называется римановой метрикой.

Замечание. Пусть U — карта атласа M с координатами $q_1, \dots, q_n$. Тогда риманова метрика задается формулой

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(q) dq_i dq_j, \quad a_{ij} = g_{ij}$$

где dq_i — координаты касательного вектора.

Функции $a_{ij}(q)$ разумеется, предполагаются дифференцируемыми нужное число раз.

Голономная система

Пусть M — риманово многообразие, $x(t)$ — кривая в M . Вектор скорости $\dot{x}(t)$ касается M : $\dot{x}(t) \in TM_{x(t)}$.

Кинетической энергией кривой в точке x называется

$$T = \frac{1}{2} \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle$$

Потенциальной энергией называется дифференцируемая функция

$$U \text{ на } M \quad (U: M \rightarrow \mathbb{R}).$$

Определение. Совокупность M, T, U называется голономной системой с конфигурационным пространством M и потенциальной энергией U . Движениями (или траекториями)

системы называются экстремали $x(t)$ функционала

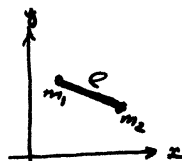
$$\int_{t_0}^t L dt \quad \text{где } L = T - U, \quad x(t) \in M$$

Следствие. На каждой карте движение удовлетворяет уравнениям Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Пример. Рассмотрим две точки массы m_1, m_2 , соединенные отрезком длины ℓ на плоскости x, y . Тогда конфигурационное пространство трех измерений

$$M = R^2 \times S^1 \subset R^2 \times R^2$$



определяется в четырехмерном конфигурационном пространстве $R^2 \times R^2$ двух свободных точек (x_1, y_1) , (x_2, y_2) условием $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \ell$

В касательном пространстве к четырехмерному пространству x_1, x_2, y_1, y_2 есть квадратичная форма

$$m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

Наше трехмерное многообразие, как вложенное в четырехмерное, снабжается римановой метрикой. Полученная голономная система и называется в механике отрезком постоянной длины на плоскости x, y . Кинетическая энергия дается формулой

$$m_1 \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}{2} + m_2 \frac{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}{2}$$

Замечание. Система с голономными связями, введенная в конце прошлой лекции, есть частный случай определенной вы-

ше голономной системы. Действительно, рассмотрим конфигурационное пространство M системы со связями как вложенное в конфигурационное пространство свободных точек (евклидово) с метрикой $\sum m_i \dot{z}_i^2$

Тогда соответствующая риманову многообразию M и потенциальной энергии U голономная система совпадает с системой, определенной в конце лекции II или с предельным случаем системы с потенциалом $U + Nq_2^2$, $N \rightarrow \infty$, быстро растущим вне M .

Из сказанного вытекает

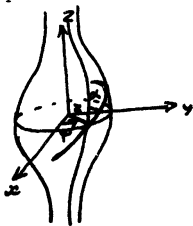
Рецепт решения задач со связями

1. Найти конфигурационное пространство и ввести в нем координаты $q_1, \dots, q_k$ (в окрестности каждой точки, вообще говоря, свои).

2. Выразить кинетическую энергию $T = \sum \frac{1}{2} m_i \dot{z}_i^2$ в виде квадратичной формы относительно обобщенных скоростей $T = \frac{1}{2} \sum a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j$.

3. Составить функцию Лагранжа $L = T - U(q)$ и решать уравнения Лагранжа.

Пример. Рассмотрим движение материальной точки массы I по поверхности вращения в трехмерном пространстве. Можно показать, что траектории суть геодезические поверхности. В цилиндрических координатах z, φ, r поверхность задается (локально) в виде $z = z(r)$ или $r = r(z)$. Соответственно, кинетическая энергия имеет вид



$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}[(1+z'^2)\dot{z}^2 + z^2(\dot{\varphi})^2] \text{ в координатах } \varphi, z \\ = \frac{1}{2}[(1+z'^2)\dot{z}^2 + z^2\dot{\varphi}^2] \text{ в координатах } z, \varphi$$

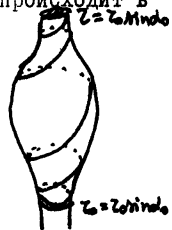
(использовано соотношение $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{z}^2 + z^2\dot{\varphi}^2$).

Функция Лагранжа $L = T$. В обеих системах координат φ -циклическая координата. Соответствующий импульс сохраняется $P_\varphi = z^2\dot{\varphi}$; нечто иное, как z -компонента момента количества движения. Так как система имеет две степени свободы, знание циклической координаты φ достаточно, чтобы проинтегрировать задачу до конца (см. следствие 3, стр. 35).

Ясное представление о ходе траекторий проще получить рассуждая немного по-другому. Обозначим через α угол траектории с меридианом. Имеем: $z\dot{\varphi} = |\vec{v}| \sin \alpha$, где $|\vec{v}|$ величина вектора скорости. Но по закону сохранения энергии $H = L = T$ сохраняется. Следовательно, $|\vec{v}| = \text{const}$. Поэтому закон сохранения P_φ принимает вид $z \sin \alpha = \text{const}$.

("теорема Клеро")

Это соотношение показывает, что движение происходит в области $|\sin \alpha| < 1$, т.е. $z \geq z(0) \sin \alpha(0)$. Кроме того, наклон траектории к меридиану увеличивается при уменьшении радиуса z , достигнув наименьшего возможного $z = z(0) \sin \alpha(0)$.



траектория отражается
и возвращается в область с большим z .

Задача. Доказать, что все геодезические на нарисованной поверхности вращения делятся на 3 класса: меридианы, замкнутые кривые, и геодезические, всюду плотные в кольце $z \geq c$.

Задача. Исследовать поведение геодезических на поверхности тора $((z-R)^2 + z^2 = \rho^2)$.

Подп. к печати 26/X-66г. Л-45639. Ф. 60х90/16.
Физ.п.л. 3,5. Уч.-изд.л. 2,62. Зак. 2022. Тир. 550
Цен: 7 коп.

Отпечатано на ротавригтах в тип. Изд-ва МГУ
Москва, Ленинские горы.

Цена 7 коп.